Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcija "Zakrivljenost i torzija krive" i "Frenet-ovi obrasci")

157. Provjerite da se Frenet-Serretove formule u matričnom obliku mogu napisati ovako:

$$\begin{bmatrix} \vec{t}^{0\prime} \\ \vec{n}^{0\prime} \\ \vec{b}^{0\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}^{0} \\ \vec{n}^{0} \\ \vec{b}^{0} \end{bmatrix}.$$

158. Naći polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin \frac{t}{2}, \; t \in \mathbf{R}$$

Zakrivljenost ćemo računati po formuli:

$\varkappa = \dfrac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$, jer krivulja nije parametrizirana duljinom luka.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = a^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \cos t & \sin t & 2\cos \frac{t}{2} \\ \sin t & \cos t & -\sin \frac{t}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= a^2 \left[\left(-\sin t \sin \frac{t}{2} - 2\cos t \cos \frac{t}{2} \right) \vec{i} + \left(2 \sin t \cos \frac{t}{2} + \right.\right.$$

$$+ (1-\cos t) \sin \frac{t}{2}\Big) \vec{j} + \left(\cos t (1-\cos t) - \sin^2 t\right) \vec{k}\Big] =$$

$$= a^2\left[\left(-2\sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - 2\cos^3 \frac{t}{2} + 2\sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\right) \vec{i} + \right.$$

$$\left. + \left(4\sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} + 2\sin^3 \frac{t}{2}\right) \vec{j} + (\cos t - 1) \vec{k}\right] =$$

$$= \left[-2\cos^3 \frac{t}{2}\, \vec{i} + \left(4\sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} + 2\sin^3 \frac{t}{2}\right) \vec{j} - 2\sin^2 \frac{t}{2}\, \vec{k}\right] a^2.$$

Zatim:

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = a^4\left[4\cos^6 \frac{t}{2} + 16\sin^2 \frac{t}{2} \cos^4 \frac{t}{2} + 16\sin^4 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} + 4\sin^6 \frac{t}{2} + \right.$$

$$\left. + 4\sin^4 \frac{t}{2}\right] = a^4\left[4\left(1 - \sin^2 \frac{t}{2}\right)^3 + 16\sin^2 \frac{t}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 4\sin^6 \frac{t}{2} + 4\sin^4 \frac{t}{2}\right] = 4a^4\left(1 + \sin^2 \frac{t}{2}\right).$$

Izračunajmo nazivnik:

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = a^2\left[(1-\cos t)^2 + \sin^2 t + 4\cos^2 \frac{t}{2}\right] = a^2\left[2(1-\cos t) + 4\cos^2 \frac{t}{2}\right] =$$

$$= a^2\left[4\sin^2 \frac{t}{2} + 4\cos^2 \frac{t}{2}\right] = 4a^2.$$

Tada je $|\dot{\vec{r}}| = 2a$, $|\dot{\vec{r}}|^3 = 8a^3$.

Za polumjer zakrivljenosti dobivamo:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{4a}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}}}.$$

*159. Naći torziju krivulje:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Računat ćemo po formuli: $\tau = \dfrac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$,

jer krivulja nije parametrizirana duljinom luka.
Jednadžbu krivulje možemo pisati u vektorskom obliku:

$$\vec{r} = \{\cos t,\ \sin t,\ \operatorname{sh} t\}.$$

Računajmo brojnik:

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & \operatorname{ch} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t \\ \sin t & -\cos t & \operatorname{ch} t \end{vmatrix} =$$

$$= \sin^2 t \operatorname{ch} t + \sin t \cos t \operatorname{sh} t + \cos^2 t \operatorname{ch} t + \sin^2 t \operatorname{ch} t + \\ + \cos^2 t \operatorname{ch} t - \sin t \cos t \operatorname{sh} t = 2 \operatorname{ch} t = e^t + e^{-t}.$$

Da bismo izračunali nazivnik, izračunajmo najprije:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & \operatorname{ch} t \\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{sh} t \end{vmatrix} = (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)\, \vec{i} +$$

$$+ (\sin t \operatorname{sh} t - \cos t \operatorname{ch} t)\, \vec{j} + \vec{k}.$$

Dalje je:

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = (\cos t \operatorname{sh} t + \sin t \operatorname{ch} t)^2 + (\sin t \operatorname{sh} t + \cos t \operatorname{ch} t)^2 + 1 = \\ = \operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 t.$$

Tada je torzija:

$$\tau = \frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}.$$

160. Naći zakrivljenost i torziju krivulje:

$$y = \frac{x^2}{2a}, \qquad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

u točki $x = 2a$.

Zakrivljenost i torziju izračunat ćemo po formulama:

$$\varkappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2},$$

jer krivulja nije parametrizirana duljinom luka.

Krivulja ima vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = t\,\vec{i} + \frac{t^2}{2a}\,\vec{j} + \frac{t^3}{6a^2}\,\vec{k}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a zadana točka je $T = \left(2a,\ 2a,\ \frac{4}{3}a\right)$.

Računajmo:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \dfrac{t}{a} & \dfrac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \dfrac{1}{a} & \dfrac{t}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{t^2}{2a^3}\,\vec{i} - \frac{t}{a^2}\,\vec{j} + \frac{1}{a}\,\vec{k},$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = \frac{(t^2+2a^2)^2}{4a^6},$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{(t^2+2a^2)^2}{4a^4},$$

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{t}{a} & \dfrac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \dfrac{1}{a} & \dfrac{t}{a^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^3}.$$

Tada je:

$$\varkappa = \frac{t^2+2a^2}{2a^3} \cdot \left(\frac{2a^2}{t^2+2a^2}\right)^3 = \frac{4a^3}{(t^2+2a^2)^2},$$

$$\tau = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{4a^6}{(t^2+2a^2)^2} = \frac{4a^3}{(t^2+2a^2)^2} = \varkappa.$$

U točki T je:

$$\varkappa = \frac{1}{9a}, \quad \tau = \frac{1}{9a}.$$

161. Neka se odredi funkcija $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tako da krivulja

$$\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + f(t)\,\vec{k}, \quad t \in \mathbf{R}$$

bude ravninska.

Nuždan i dovoljan uvjet da krivulja bude ravninska jest da je torzija jednaka nuli:

$\tau = 0$, tj.

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = 0, \text{ odnosno: } \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} = 0$$

Imamo:

$$(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r}) = \begin{vmatrix} \dot x & \dot y & \dot z \\ \ddot x & \ddot y & \ddot z \\ \dddot x & \dddot y & \dddot z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & f' \\ -a\cos t & -a\sin t & f'' \\ a\sin t & -a\cos t & f''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ovo nam daje diferencijalnu jednadžbu:

$$a^2 f' + a^2 f''' = 0, \quad \text{odnosno:} \quad f' + f''' = 0,$$

čije je rješenje:

$$f(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t.$$

162. Dokazati da je krivulja:

$$\begin{aligned} x &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \\ y &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \\ z &= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, \end{aligned}$$

ravninska i naći jednadžbu ravnine u kojoj ona leži.

Kako je $\dddot x = 0$, $\dddot y = 0$, $\dddot z = 0$, to je i $\dddot{\vec r} = 0$, pa je $\tau = 0$, tj. torzija je jednaka nuli. Krivulja je, dakle, ravninska. U tom slučaju ravnina u kojoj krivulja leži jest oskulaciona, i njena jednadžba glasi, u bilo kojoj točki, npr. u $t = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

163. Pokazati da su zakrivljenost i torzija zavojnice:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad t \in \mathbf{R}$$

konstantne.

164. Naći zakrivljenost i torziju zavojnice na stošcu:

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = \mathrm{a}t, \quad t \in \mathbf{R}$$

u ishodištu koordinatnog sustava.

165. Naći zakrivljenost i torziju krivulje:

$$x = \mathrm{e}^t, \quad y = \mathrm{e}^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

166. Naći zakrivljenost i torziju krivulje:

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2, \quad t \in \mathbf{R}$$

u točki (2, 0, 1).

167. Ako je zakrivljenost krivulje u svakoj točki jednaka nuli, dokazati da je krivulja pravac.

168. Ako je torzija krivulje u svakoj točki jednaka nuli, dokazati da je ta krivulja ravninska.

U zadacima od 169. do 176. naći zakrivljenost i torziju.

169. $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = a t, \quad t \in \mathbf{R}$

170. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3, \quad t \in \mathbf{R}$

171. $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t, \quad t \in [0, \pi],$

172. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t, \quad t \in \mathbf{R}$

173. $\vec{r} = \left\{ t + \frac{a^2}{t}, \quad t - \frac{a^2}{t}, \quad 2a \ln \frac{t}{a} \right\}, \quad t \in \mathbf{R}$

174. $\vec{r} = \{ \cos t, \ \sin t, \ \operatorname{ch} t \}, \ t \in \mathbf{R}$ u točki $t = 0$.

175. $y^2 = x, \ x^2 = z.$

176. $x^3 = 3a^2 y, \quad 2xz = a^2.$

177. Pokazati da su zakrivljenost i torzija krivulje:

$$\vec{r} = \{ 3t, \ 3t^2, \ 2t^3 \}, \ t \in \mathbf{R},$$

proporcionalne (faktor proporcionalnosti $k = \text{const.}$).

178. Naći polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$$

u točki $x = a, \ y > 0$.

179. Naći polumjer zakrivljenosti i torziju krivulje:

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1, \ y^2 - 2x + z = 0$$

u točki $M = (1, 1, 1)$, (vidi zad. 98).

180. Naći zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \ x + y - z = 0$$

u točki $x = 0, \ y > 0, \ z > 0$.

181. Naći za koje vrijednosti od a i b je zakrivljenost krivulje:

$$x = a \operatorname{ch} t, \ y = a \operatorname{sh} t, \ z = bt$$

u svakoj točki jednaka torziji.

182. Naći točke na krivulji:

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t, \quad t \in [0, \pi]$$

u kojima zakrivljenost poprima minimalnu vrijednost (lokalnu).

183. U kojim točkama polumjer zakrivljenosti krivulje:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2}, \ t \in \mathbf{R}$$

dostiže minimum (lokalni)?

184. Pokazati da se normalna, rektifikaciona i oskulaciona ravnina krivulje

$$\vec{r} = \{3t,\ 3t^2,\ 2t^3\}, \quad t \in \mathbf{R}$$

u točki maksimalne zakrivljenosti podudaraju s koordinatnim ravninama (vidi zad. 177).

185. Naći zakrivljenost i torziju krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{\int f(t) \sin t \,\mathrm{d}t,\quad \int f(t) \cos t \,\mathrm{d}t,\quad \int f(t)\, \psi(t) \,\mathrm{d}t\},$$

gdje su $f,\ \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bar dvaput diferencijabilne.

186. Naći funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takvu da krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{\int f(t) \sin t \,\mathrm{d}t,\quad \int f(t) \cos t \,\mathrm{d}t,\quad \int f(t) \operatorname{tg} t \,\mathrm{d}t\}$$

ima konstantnu zakrivljenost (f je diferencijabilna).

187. Naći funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takvu da krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{t^2,\ t,\ f(t)\}$$

bude ravninska (f je bar tri puta diferencijabilna).

U zadacima od 188. do 191. pokazati da je krivulja ravninska i naći ravninu u kojoj ona leži.

188.

$$x = 1 + 3t + 2t^2,$$
$$y = 2 - 2t + 5t^2,$$
$$z = 1 - t^2, \quad t \in \mathbf{R}.$$

189.

$$\vec{r} = \{u^2 + 4u + 6,\ 2u^2 + 2u + 3,\quad 5u^2 + 2u + 7\}, \ u \in \mathbf{R}.$$

190.

$$x = \frac{1+t}{1-t},\ y = \frac{1}{1-t^2},\ z = \frac{t}{1+t},\ t \in \mathbf{R}.$$

191.

$$x = a_1 t^n + b_1 t^p + c_1.$$
$$y = a_2 t^n + b_2 t^p + c_2,$$
$$z = a_3 t^n + b_3 t^p + c_3, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(n i p su prirodni brojevi.)

192. Zadana je krivulja:

$$x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z.$$

1° Naći polumjer zakrivljenosti te duljinu luka od točke (0, 0, 0) do točke $M = (x,\ y,\ z)$.

2° Pokazati da tangente zatvaraju konstantan kut s danim smjerom.

193. Zadana je krivulja:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin t + \cos t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

U točki $M(t)$ naći oskulacionu ravninu, glavnu normalu, polumjer zakrivljenosti i torziju.

194. Naći jednadžbu oskulacione ravnine, glavne normale, polumjer zakrivljenosti i torziju krivulje:

$$y = x^2, \quad z = x^3$$

u jednoj njezinoj točki.

195. 1° Ako neka ravnina siječe graf krivulje:

$$\vec{r} = \{ a_1 t,\, a_2 t^2,\, a_3 t^3 \}, \quad t \in \mathbf{R},$$

u točkama za koje je $t = t_1$, $t = t_2$ i $t = t_3$, onda je njena jednadžba:

$$a_2 a_3 (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)\, x - a_1 a_3 (t_1 + t_2 + t_3)\, y + a_1 a_2\, z - a_1 a_2 a_3\, t_1 t_2 t_3 = 0.$$

2° Koristeći 1° napisati jednadžbu oskulacione ravnine dane krivulje.

Rješenja

163. $\varkappa = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$; $\quad \tau = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

164. $\varkappa = \dfrac{2}{1 + a^2}$; $\quad \tau = \dfrac{3a}{2(1 + a^2)}$.

165. $\tau = -\varkappa = -\dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$;

166. $\tau = -\varkappa = -\dfrac{2t}{(2t^2 + 1)^2}$; u zadanoj točki: $\tau = -\varkappa = -\dfrac{2}{9}$.

169. $\varkappa = \tau = \dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$.

170. $\varkappa = \tau = \dfrac{1}{3(t^2 + 1)^2}$.

171. $\varkappa = \dfrac{3}{25 \sin t \cos t}$; $\quad \tau = \dfrac{4}{25 \sin t \cos t}$.

172. $\varkappa = \dfrac{\sqrt{2}}{3e^t}$; $\quad \tau = \dfrac{1}{3e^t}$.

173. $\varkappa = \tau = \dfrac{at^2}{(a^2 + t^2)^2}$.

174. $\varkappa = \sqrt{2}$, $\quad \tau = 0$.

175. $\varkappa = \dfrac{2\sqrt{1 + 36y^4 + 64y^6}}{\sqrt{(1 + 4y^2 + 16y^4)^3}}$; $\quad \tau = -\dfrac{12y}{1 + 36y^4 + 64y^6}$.

176. $\varkappa = -\tau = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{2x^2}\right)^2$.

177. $\varkappa = \tau = \dfrac{2}{3(2t^2 + 1)^2}$.

178. $\dfrac{1}{\varkappa} = \dfrac{\sqrt{(2a + b)^3}}{\sqrt{a + b}}$.

179. $\dfrac{1}{\varkappa} = \sqrt{6}$, $\quad \tau = 1$.

180. 2, $\; -\dfrac{1}{2}$.

181. $a = b$.

182. za $t = \dfrac{\pi}{4}$.

183. za $t = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

184. za $t = 0$, $\varkappa$ je maksimalna; normalna, oskulaciona i rektifikaciona ravnina glase:

$$(x - 3t) + 2t(y - 3t^2) + 2t^2(z - 2t^3) = 0,$$
$$2t^2(x - 3t) - 2t(y - 3t^2) + (z - 2t^3) = 0,$$
$$-2t(x - 3t) + (1 - 2t^2)\,(y - 3t^2) + 2t(z - 2t^3) = 0,$$

odnosno u točki $t = 0$: $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$.

185. $\varkappa = \dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{1+\psi^2+\psi'^2}{(1+\psi^2)^3}}\,, \qquad \tau = \dfrac{1}{f}\,\dfrac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}\,.$

186. $f(t) = \dfrac{1}{k}\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}\,.$ **187.** $f(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3.$

188. $2x+3y+19z-27=0.$ **189.** $x-3y+z-4=0.$ **190.** $x-4y-2z+3=0.$

191. $\begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_2 & z-c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ (kao zad. 162).

192. Neka je jednadžba krivulje $\vec{r} = \{3t, 3t^2, 2t^3\}$

1° $\dfrac{1}{R} = \dfrac{3}{2}(2t^2+1)^2; \quad s = x(2x^2+3);$

2° Neka je zadan smjer: $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, a kojim tangente zatvaraju konstantni kut:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|\vec{a}|\,|\vec{r}|} = \frac{3(l+2mt+2nt^2)}{3\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{1+4t+4t^2}} = \frac{l+2mt+2nt^2}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}(2t^2+1)}\,.$$

Da bi $\cos\alpha$ bio konstantan, tj. da ne zavisi od t mora biti:

$$l+2mt+2nt^2 = \underbrace{k_1\sqrt{l^2+m^2+n^2}}_{\mu}(2t^2+1),$$

tj. mora biti:

$2n = 2\mu$, $2m = 0$, $l = \mu$, odnosno:

$n = \mu$, $m = 0$, $l = \mu$, pa je traženi smjer:

$\vec{a} = \mu(\vec{i}+\vec{k})$. Tada je $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, pa je konstantan kut $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

193. $x + y - \sqrt{2}\,z = 0$, oskulaciona ravnina

$$\frac{x-a\cos t}{\sin t - 3\cos t} = \frac{y-a\sin t}{\cos t - 3\sin t} = \frac{z-\dfrac{a}{\sqrt{2}}(\sin t+\cos t)}{-\sqrt{2}(\sin t+\cos t)},$$

$\dfrac{1}{\varkappa} = \dfrac{a}{4}\sqrt{(3-\sin 2t)^3}, \quad \tau = 0,$ pa krivulja leži u ravnini:

$x + y - \sqrt{2}\,Z = 0$, rj. u oskulacionoj ravnini.

194. $3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0$ – oskulaciona ravnina,

$$\frac{x-t}{2t+9t^3} = \frac{y-t^2}{9t^4-1} = \frac{z-t^3}{9t^5-6t^4-3t}, \quad \text{glavna normala,}$$

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}{2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}, \quad \tau = \frac{3}{1+9t^2+9t^4}.$$

195. 1° Iz sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ Aa_1 t_1 + Ba_2 t_1^2 + Ca_3 t_1^3 + D &= 0 \\ Aa_1 t_2 + Ba_2 t_2^2 + Ca_3 t_2^3 + D &= 0 \\ Aa_1 t_3 + Ba_2 t_3^2 + Ca_3 t_3^3 + D &= 0 \end{aligned}$$

Proizlazi jednadžba ravnine:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 t_1 & a_2 t_1^2 & a_3 t_1^3 & 1 \\ a_1 t_2 & a_2 t_2^2 & a_3 t_2^3 & 1 \\ a_1 t_3 & a_2 t_3^2 & a_3 t_3^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pomnožimo ovu jednadžbu s $\dfrac{a_1 a_2 a_3}{a_1 a_2 a_3}$ množeći prvi redak s $a_1 a_2 a_3$, zatim dijeleći prvi stupac s a_1, drugi s a_2, treći s a_3 dobijemo:

$$\begin{vmatrix} a_2 a_3 x & a_1 a_3 y & a_1 a_2 z & a_1 a_2 a_3 \\ t_1 & t_1^2 & t_1^3 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & t_2^3 & 1 \\ t_3 & t_3^2 & t_3^3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

odnosno:

$$\begin{aligned} & a_2 a_3 (t_2 - t_1)\ (t_3 - t_2)\ (t_3 - t_1)\ [t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3]\ x - \\ & - a_1 a_3 (t_2 - t_1)\ (t_3 - t_2)\ (t_3 - t_1)\ (t_1 + t_2 + t_3)\ y + \\ & + a_1 a_2 (t_2 - t_1)\ (t_3 - t_2)\ (t_3 - t_1)\ z - \\ & - a_1 a_2 a_3 t_1 t_2 t_3 (t_2 - t_1)\ (t_3 - t_2)\ (t_3 - t_1) = 0. \end{aligned}$$

Dijelivši s $(t_2 - t_1)\ (t_3 - t_2)\ (t_3 - t_1)$ dokazana je tvrdnja.

2° Ako u 1° stavimo za $t_2 \to t_1$ i za $t_3 \to t_1$ dobijemo:

$$3 a_2 a_3 t_1^2 x - 3 a_1 a_3 t_1 y + a_1 a_2 z - a_1 a_2 a_3 t_1^3 = 0,$$

što je jednadžba ravnine u kojoj krivulja leži, pa je to prema tome oskulaciona ravnina.